مطالعهٔ تولید آنتروپی و ارزیابی خواص آماری انتقال حرارت در جریان مغشوش*

فرهاد وحیدی‌نیا(۱)   محدثه میری(۲)   بهروز کشته‌گر(۳)

چکیده *در این مقاله، اثر قطر نانو ذرات در انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری جریان مغشوش سیال نانوی آب/ اکسید آلومینیوم درون یک لولهٔ دایره‌ای شکل تحت شار حرارتی یکنواخت در دیواره بااستفاده‌از مدل مخلوط دوفازی به‌صورت عددی بررسی و تحلیل آماری شده است. کسر حجمی نانوذرات ۱، ۳ و ۵ درصد، عدد رینولدز ۲۵×۱۰^۳، ۵×۱۰^٤ و ۷۵×۱۰^۳ و تغییرات قطر نانوذرات نیز در محدودهٔ ۲۰ تا ۱۰۰ نانومتر فرض شده است. در تحلیل آماری از توابع توزیع احتمال پیوسته نظیر؛ گاما، نرمال، لوگ نرمال، گامبل، وایبول و فسچر استفاده گردیده است. پس از بررسی نتایج مشخص شد که باافزایش قطر ذرات نانو عدد ناسلت کاهش یافته است و با توجه به تغییرات قطر نانوذرات از تابع توزیع احتمال فسچر پیروی نموده است.*

واژه‌های کلیدی نانو سیال; انتقال حرارت جابه‌جایی; قطر ذرات نانو; عدد ناسلت; تابع توزیع احتمال; خواص آماری.

Study of Entropy Generation and Evaluation of Statistical Heat Transfer Properties in Turbulent Flow

F. Vahidina   M. Miri   B. Keshtegar

Abstract *In this paper, effect of the nanoparticles diameter on the forced convection heat transfer of turbulent flow of Al_2O_3-water nanofluids in a circular tube under constant heat flux on the wall using two phase mixture model is numerically investigated and statistically analysed. The Volume fraction of nanoparticles are %1, %3 and %5 , the Reynolds numbers are 25×10^3, 5×10^4 and 75×10^3 and the variation of diameter of nanoparticles is assumed in the range of 20- 100nm. In the statistical analysis, from the continuous probability distribution functions such as Gamma, Normal, Lognormal, Gumbel, Weibull and Frechet are used. After reviewing the results, it was found that by increasing the diameter of nanoparticles, the Nusselt number is reduced and due to changes in the nanoparticles diameter has followed the Frechet probability distribution function.*

Key Words Nanofluid; Convection heat transfer; nanoparticles diameter; Nusselt number; Probability density function; Statistical properties.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۷/۲۵ و تاریخ پذیرش آن ۹٦/۱/۲٦ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i1.59586

(۱) مربی، مهندسی مکانیک، دانشگاه زابل.

(۲) مربی، مهندسی مکانیک، دانشگاه زابل.

(۳) نویسندهٔ مسئول: استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه زابل. Bkeshtegar @uoz.ac.ir

مقدمه

استفاده از نانوسیال در سیستم‌های انتقال حرارت به‌جای سیالات رایج مثل آب و روغن هدف بزرگی است که بسیاری از دانشمندان این حوزه درپی تحقق آن هستند. اگر مشکل ته‌نشینی و کلوخه‌شدن نانوسیال مرتفع گردد و استفاده از آن به‌طور گسترده صورت گیرد، انقلابی در صنایع وابسته به انتقال حرارت رخ خواهد داد. دانشمندان زیادی در زمینهٔ نانوسیال مطالعه کرده‌اند و اکثراً بر این باورند که استفاده از ذرات نانوی فلزی و نافلزی معلق در سیال پایه موجب بهبود پارامترهای ترموفیزیکی نانوسیال می‌شود و درنتیجه کارایی سیستم‌های انتقال حرارت افزایش می‌یابد. در اکثر این مطالعات استفاده از نانوذرات CuO، TiO_2، Al_2O_3 و SiO_2 بیشتر به‌چشم می‌خورد [1, 2]. مطالعات انتقال حرارت بااستفاده‌از نانوسیال در کانال‌ها با سطح مقطع‌های مختلف و شرایط مرزی متفاوت انجام شده است [3, 4]. در این مطالعات مشاهده می‌شود که اثر متغیرهای مختلف نانوسیال از قبیل کسر حجمی و قطر ذرات نانو برروی پارامترهای حرارتی و هیدرودینامیکی جریان شامل عدد ناسلت، ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، تنش برشی و ضریب اصطکاک سطحی بررسی می‌گردد. از طرفی در یک کسر حجمی ثابت یا قطر نانوذرات ثابتی اثر تغییرات عدد رینولدز یا تغییرات عدد گراشهف برروی پارامترهای حرارتی و هیدرودینامیکی مطالعه شده است [5, 6]. یکی از مهم‌ترین پارامترهای موردمطالعه در مبحث نانوسیال بررسی اثر قطر نانوذرات در انتقال حرارت جریان می‌باشد. باتوجه‌به این موضوع که هرچه قطر ذرات کوچک‌تر باشد میزان معلق بودن آنها در سیال پایه بیشتر است **[7]** مطالعه درمورد اثر این متغیر بر پارامترهای جریان در مقالات مختلف انجام شده است. میرمعصومی و بهزادمهر [8] اثر قطر متوسط نانوذرات را در انتقال حرارت جابه‌جایی ترکیبی جریان آرام کاملاً توسعه‌یافته بااستفاده‌از مدل مخلوط دوفازی در یک لولهٔ دایره‌ای‌شکل به‌صورت عددی بررسی نمودند. آنها دریافتند که با کاهش قطر نانوذرات، ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. اما تغییرات ضریب اصطکاک سطحی قابل‌ملاحظه نیست. اکبری‌نیا و لاهور [9] اثر قطر متوسط نانوذرات را در انتقال حرارت جابه‌جایی ترکیبی جریان آرام بااستفاده‌از مدل مخلوط دوفازی در یک لولهٔ منحنی‌شکل به‌صورت عددی بررسی نمودند. آنها نتیجه گرفتند که باافزایش قطر نانوذرات، عدد ناسلت کاهش می‌یابد. آنوپ و همکاران [10] به‌طور تجربی به بررسی انتقال حرارت جریان آرام سیال نانو در ناحیهٔ درحال‌توسعه در یک لوله با شار حرارتی ثابت در دیواره پرداختند. آنها مشاهده کردند که ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی نانوسیال بزرگ‌تر از سیال پایه است و با افزایش قطر نانوذرات کاهش می‌یابد. فانی و همکاران [11] اثر اندازه نانوذرات را در یک کانال ذوزنقه‌ای‌شکل بررسی کردند. آنها دریافتند که باافزایش قطر نانوذرات، انتقال حرارت کاهش می‌یابد. مختاری و همکاران [12] اثر قطر متوسط نانوذرات را در انتقال حرارت جابه‌جایی ترکیبی جریان آرام بااستفاده‌از مدل دوفازی مخلوط در یک حلقوی بررسی کردند. آنها مشاهده کردند که با افزایش قطر نانوذرات، عدد ناسلت هم در دیوارهٔ بالایی و هم در دیوارهٔ پایینی کاهش می‌یابد.

انتقال حرارت جابه‌جایی بااستفاده‌از نانوسیال ازجمله مباحثی است که محققان روابط زیادی برای نتیجه تحقیقاتشان ارائه کرده‌اند که ازجمله مهم‌ترین آنها رابطهٔ عدد ناسلت است که برحسب متغیرهایی نظیر عدد رینولدز، عدد پرانتل و کسر حجمی نانوذرات استخراج شده است. شاید بتوان مهم‌ترین رابطه برای عدد ناسلت در نانو سیال را رابطهٔ پاک و چو [13] نامید. عباسیان ارانی و امانی [14] انتقال حرارت

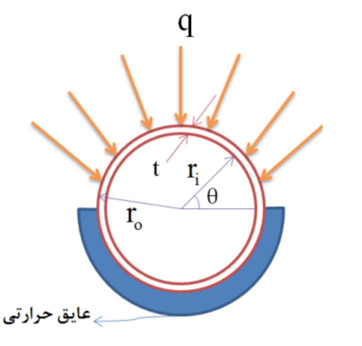
جابه‌جایی جریان مغشوش نانوسیال را در یک مبدل حرارتی دو لوله‌ای به‌صورت آزمایشگاهی بررسی کردند و دریافتند که عدد ناسلت نانوسیال از سیال پایه بیشتر است. سجادی و کاظمی [15] رابطه‌ای برای عدد ناسلت برحسب عدد رینولدز و عدد پرانتل در جریان مغشوش نانوسیال در یک لولهٔ دایره‌ای‌شکل ارائه کردند. بهشتی و همکاران [16] انتقال حرارت جابه‌جایی جریان مغشوش دو نانوسیال آلومینا و تیتانیا را در یک کانال حلقوی بررسی کردند و رابطه‌ای برای عدد ناسلت به‌دست آوردند.

در این مقاله دو هدف مهم براساس تغییر قطر نانوذرات دنبال گردیده است. یکی از این اهداف بررسی تولید آنتروپی است و هدف مهم‌تر بررسی و تحلیل آماری عدد ناسلت می‌باشد. همان‌طور که از مطالعات فوق مشخص است در به‌دست آوردن روابط عدد ناسلت، موضوع آماری مطالعه نشده است. بحث آماری و استفاده از پارامترهای آماری در مبحث نانوسیال موضوعی است که کمتر به آن توجه شده است. وحیدی‌نیا و همکاران **[17]** اثر کسر حجمی نانوذرات را در انتقال حرارت جابه‌جایی جریان مغشوش به‌صورت آماری بررسی نمودند. آنها نتیجه گرفتند که با افزایش کسر حجمی ذرات نانو ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی افزایش می‌یابد و تابع توزیع احتمال آن برحسب متغیر کسر حجمی نانوذرات گمبل ماکزیمم می‌باشد. آنها اثر قطر نانوذرات را بر خواص آماری جریان مغشوش نانوسیال بررسی ننموده‌اند. بنابراین در مقالهٔ حاضر، اثر قطر ذرات نانو در انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری جریان مغشوش سیال نانو در یک لولهٔ دایره‌ای‌شکل بااستفاده‌از مدل مخلوط دوفازی به‌صورت عددی مطالعه و از دیدگاه آماری نیز تجزیه و تحلیل شده است. بر همین اساس تابع توزیع احتمال عدد ناسلت برحسب متغیر قطر ذرات نانو با ثابت ماندن دو متغیر عدد رینولدز و کسر حجمی نانوذرات مشخص شده است.

در این مقاله، ابتدا جریان نانوسیال داخل یک لولهٔ دایره‌ای‌شکل بااستفاده‌از نرم‌افزار فلوئنت (Fluent) شبیه‌سازی عددی شده و سپس داده‌های عدد ناسلت در نقاط مختلف لوله محاسبه گردیده است. در مرحلهٔ بعد برروی داده‌های عدد ناسلت تحلیل آماری بااستفاده‌از نرم‌افزار آماری ایزی فیت (Easy Fit) صورت گرفته است. به‌منظور تعیین پارامترهای توابع توزیع احتمال مانند گاما، نرمال، لوگ نرمال، گامبل، وایبول و فسچر از روش برازش حداکثر درست‌نمایی استفاده گردیده که بهترین توابع توزیع بااستفاده‌از آماره مربع کای انتخاب شده است. پارامترهای هر تابع توزیع و خواص آماری داده‌ها مانند گشتاور اول (میانگین)، گشتاور دوم (انحراف معیار)، گشتاور سوم (چولگی) و گشتاور چهارم (برجستگی) در دو ناحیه توسعه‌یافته و درحال‌توسعهٔ جریان مقایسه شده است.

نحوهٔ مدل‌سازی جریان نانوسیال در داخل لوله

هندسهٔ لولهٔ موردبررسی در شکل (۱) نشان داده شده که یک لوله با سطح مقطع دایره‌ای از جنس مس، به‌طول L (یک متر) و باشعاع داخلی r_i (۱۰ میلی‌متر)، شعاع خارجی r_o (۱۱ میلی‌متر) و ضخامت t (۱ میلی‌متر) می‌باشد.



شکل ۱ طرحوارهٔ هندسهٔ لولهٔ موردبررسی

نیمهٔ بالایی لوله دارای شار حرارتی q (۱۰^٤× ٤٤ وات بر مترمربع) و نیمهٔ پایینی لوله عایق می‌باشد. جریان آشفته نانوسیال آب/ اکسید آلومنیوم با کسر حجمی ۳ درصد ذرات نانو با دمای ورودی T_o (۲۹۳ k) و سرعت ورودی V_o وارد لوله می‌شود.

معادلات حاکم و خواص فیزیکی نانوسیال

معادلهٔ پیوستگی برای یک جریان چندفازی به‌صورت زیر بیان می‌گردد [18]:

$$\nabla.\left(\rho_m \boldsymbol{V}_m\right) = 0 \tag{۱}$$

که در آن V_m سرعت متوسط جرمی مخلوط و ρ_m دانسیته مخلوط است [9].

$$\boldsymbol{V}_m = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \rho_k \boldsymbol{V}_k \Big/ \rho_m \tag{۲}$$

$$\rho_m = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \rho_k \tag{۳}$$

معادلهٔ ممنتم جریان چندفازی در یک لوله به‌صورت زیر می‌باشد [18]:

$$\nabla.\left(\rho_m \boldsymbol{V}_m \boldsymbol{V}_m\right) = -\nabla \boldsymbol{P}_m + \nabla\left(\tau - \tau_t\right) + \nabla.\left(\sum_{k=1}^{n} \phi_k \rho_k \boldsymbol{V}_{dr,k} \boldsymbol{V}_{dr,k}\right) \tag{٤}$$

در معادلهٔ بالا n تعداد فازها و P فشار مخلوط است. $V_{dr,k}$ سرعت سوق است که برای فاز k ام به‌صورت زیر تعریف می‌شود [18]:

$$\boldsymbol{V}_{dr,k} = \boldsymbol{V}_k - \boldsymbol{V}_m \tag{۵}$$

همچنین در رابطهٔ (۲) τ تنش برشی و τ_t تنش برشی مغشوش است که براساس روابط زیر قابل‌محاسبه هستند.

$$\tau = \mu_{eff} \nabla \boldsymbol{V}_m \tag{٦}$$

$$\tau_t = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \rho_k \overline{v_k v_k} \tag{٧}$$

سرعت نسبی (V_{pf})، سرعت نسبی فاز دوم (ذرات، p) به فاز اول (سیال پایه، f) تعریف می‌گردد [18]:

$$\boldsymbol{V}_{pf} = \boldsymbol{V}_p - \boldsymbol{V}_f \tag{٨}$$

مطابق با روابط فوق می‌توان ارتباط بین سرعت سوق و سرعت نسبی را به‌صورت زیر محاسبه نمود [18]:

$$\boldsymbol{V}_{dr,f} = \boldsymbol{V}_f - \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_k \rho_k}{\rho_m} \boldsymbol{V}_{fk} \tag{٩}$$

و همچنین می‌توان سرعت نسبی بین دو فاز را از رابطهٔ ارائه‌شده توسط مانین (Manninen) محاسبه کرد [19].

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{pf}} = \frac{\rho_p d_p^2}{18 \mu_f f_{drag}} \frac{\left(\rho_p - \rho_m\right)}{\rho_p} \boldsymbol{a} \tag{١٠}$$

که در آن ρ_p دانسیتهٔ ذرات نانو، d_p قطر ذرات نانو و μ_f ویسکوزیتهٔ سیال پایهٔ (آب) و f_{drag} به‌صورت رابطهٔ زیر قابل‌محاسبه است [20]:

$$f_{drag} = \begin{cases} 1 + 0.15 Re_p^{\,0.687}, & Re_p \le 1000 \\ 0.0183 Re_p, & Re_p \ge 1000 \end{cases} \tag{١١}$$

شتاب a در معادلهٔ (۱۰) و Re_p در معادلهٔ (۱۱) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\boldsymbol{a} = g - (\boldsymbol{V}_m.\nabla)\boldsymbol{V}_m \tag{١٢}$$

$$Re_p = V_m d_p / \nu_{nf} \quad (13)$$

معادلهٔ انرژی در حل جریان مغشوش برای یک جریان چند فازی به‌صورت زیر تعریف شده است [18]:

$$\nabla.\sum_{k=1}^{n}\phi_k V_k\left(\rho_k H_k + P\right) = \nabla.(\lambda_{eff}\nabla T - c_p\rho_m\overline{vt}) \quad (14)$$

جریان آشفته توسط مدل دو معادله‌ای k-ε یکی برای انرژی جنبشی آشفته و دیگری برای نرخ اتلافات مدل سازی شده است [21]. در جریان داخلی نانوسیال با شرایط مرزی شار ثابت دانشمندانی زیادی ازجمله بایانکو و همکاران [18] از این مدل استفاده نموده‌اند. دانسیتهٔ مؤثر نانوسیال از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho_{eff} = (1-\phi)\rho_f + \phi\rho_p \quad (15)$$

ظرفیت گرمایی ویژه مؤثر نانوسیال براساس معادلهٔ (١٦) قابل‌محاسبه است [22]:

$$\left(C_p\right)_{eff} = \left[(1-\phi)\left(\rho C_p\right)_f + \phi\left(\rho C_p\right)_p\right] \Big/ \rho_m \quad (16)$$

که در آن $(C_p)_f$ و $(C_p)_p$ به‌ترتیب ظرفیت گرمایی ویژه سیال پایهٔ (٤١٨٢) و ذرات نانو (٨٨٠) برحسب (J/kgK) می‌باشد که از مرجع [12] اقتباس شده است.

ضریب هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال به‌صورت زیر پیشنهاد شده است [23].

$$\lambda_{eff}/\lambda_f = 1 + 64.7\times\phi^{0.746}\left(d_f/d_p\right)^{0.369}\times\left(\lambda_p/\lambda_f\right)^{0.746}\times pr^{.9955}\times Re^{1.2321} \quad (17)$$

که در آن d_f و d_p به‌ترتیب قطر ذرات سیال پایهٔ (٠/٢٧٥nm) و قطر ذرات نانو (١٠٠nm -٢٠ nm) می‌باشد. همچنین λ_f و λ_p به‌ترتیب قابلیت هدایتی سیال پایهٔ (٠/٦٠٢٨W/mK) و قابلیت هدایتی ذرات نانو (٣٥W/mK) می‌باشد که از مرجع [12] اقتباس شده است. پارامترهای بی‌بعد Pr (عدد پرانتل (Prandtl number)) و Re (عدد رینولدز (Reynolds number)) در معادلهٔ (١٧) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$Pr = \frac{\mu_f}{\rho_f\,\alpha_f} \quad (18)$$

$$Re = \frac{\rho_f K_b T}{3\pi\mu^2 l_{bf}} \quad (19)$$

که l_{bf} طول مسیر آزاد نامیده می‌شود و مقدار آن برای آب در دمای آزمایشگاهی (٢٥°C) برابر (٠/١٧nm) است. K_b ثابت بولتزمن است و برابر است با ($K_b = 1.3807\times10^{-23}$)، μ لزجت سیال است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = A\times10^{\frac{B}{T-C}}, C = 140, B = 247, A = 2.414e-5 \quad (20)$$

ویسکوزیتهٔ مؤثر سیال نانو به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد [23]:

$$\mu_{eff} = \mu_f + \frac{\rho_P V_B d_P^{\,2}}{72C\delta} \quad (21)$$

که در این رابطه V_B سرعت برونی و δ ضخامت لایهٔ مرزی براساس روابط زیر به‌دست می‌آیند [23].

$$V_B = \frac{1}{d_P}\sqrt{\frac{18K_b T}{\pi\rho_P d_P}} \quad (22)$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6\phi}}d_P \quad (23)$$

$$C = \mu_f^{-1}\left[\left(c_1 d_p + c_2\right)\phi + \left(c_3 d_p + c_4\right)\right] \quad (۲٤)$$

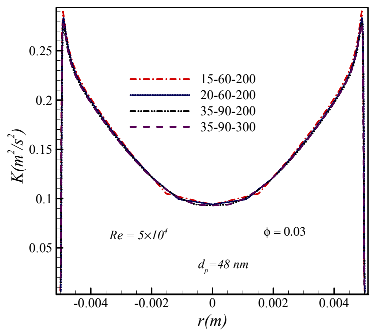
که در آن: $C_1 = -0.000001133$ ، $C_2 = -0.000002721$
$C_3 = -0.00000009$ و $C_4 = -0.000000393$

حل عددی و اعتبارسنجی

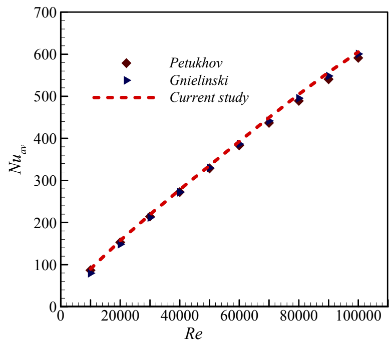
در این مطالعه برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش حجم محدود و طرح اختلاف بالادست مرتبه‌دوم استفاده شده است. ارتباط بین فشار و سرعت بااستفاده‌از الگوریتم SIMPLEC برقرار شده است. این الگوریتم برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر درون لوله، مناسب‌تر است [18]. قطر ذرات نانو جامد در محدوده ۲۰ تا ۱۰۰ نانومتر، کسر حجمی برابر ۱، ۲ و ۳ درصد و عدد رینولدز برابر با ۱۰^۳×۲۵، ۱۰^٤×۵ و ۱۰^۳×۵۷ درنظر گرفته شده است. برای انتخاب بهترین شبکه‌بندی در سه جهت شعاعی، محیطی و طول لولهٔ تست گره انجام شده که نتیجهٔ آن در شکل (۲) آورده شده است. پس‌از قیاس شبکه‌های مختلف بهترین مش‌بندی برابر ۲۰۰–۹۰–۳۵ انتخاب شده است.

در شکل (۳) مقایسهٔ عدد ناسلت متوسط مطالعهٔ حاضر با کارهای گذشتگان به‌منظور اعتبارسنجی نتایج شبیه‌سازی انجام گرفته **است**. در این شکل عدد ناسلت متوسط مطالعهٔ حاضر با دو رابطهٔ معروف گنیلینسکی [24] و پتوخوف [25] برای سیال پایه صورت گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود خطای حاصل بسیار ناچیز می‌باشد.

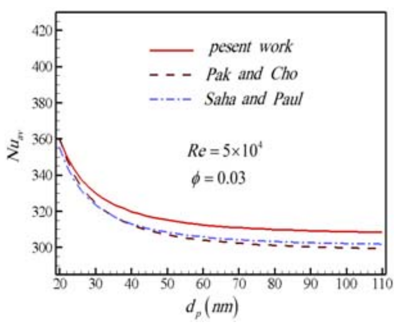
از طرفی دیگر مقایسه نتایج کار حاضر با دو رابطهٔ ارائه‌شده توسط پاک و چو [13] و ساها و پائول [26] برای نانوسیال در شکل (٤) ارائه شده است. در شکل (٤) تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب قطر ذرات نانو رسم شده است.



شکل ۲ پروفیل انرژی جنبشی آشفتگی درراستای شعاعی در انتهای لوله به‌منظور انتخاب بهترین شبکه



شکل ۳ تغییرات عدد ناسلت متوسط برای اعداد رینولدز مختلف در طول لوله و مقایسهٔ آن با روابط گنیلینسکی [24] و پتوخوف [25]



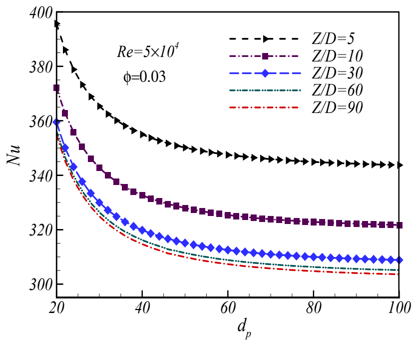
شکل ٤ مقایسهٔ عدد ناسلت متوسط کار حاضر در قطرهای مختلف نانوسیال با روابط پاک و چو [13] و ساها و پائول [26]

همان‌طور که در این شکل مشهود است نمودار عدد ناسلت کار حاضر با نمودار پاک و چو [13] و همچنین نمودار ساها و پائول [26] هم‌خوانی دارد و خطای متوسط حاصل بین کارحاضر و رابطهٔ پاک و

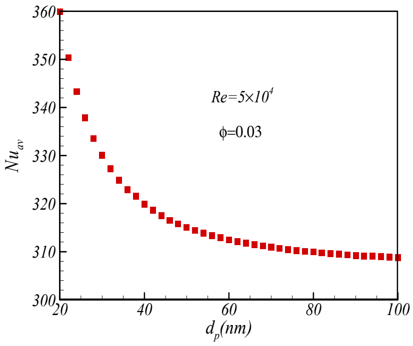
چو برابـر ۲/۵۱ درصـد و رابطـه سـاها و پـائول برابـر ۲/۱۱ درصد می‌باشد.

نتایج و بحث‌ها

در این مطالعه، انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری جریان مغشوش سـیال نـانوی آب/اکسـیدآلومینیوم درون یـک لولهٔ دایره‌ای‌شکل بااسـتفاده‌از روش دوفـازی مخلـوط به‌صورت عددی بررسـی و سـپس مهـم‌تـرین پـارامتر انتقال حرارت یعنی عدد ناسـلت تحلیـل آمـاری شـده است. به‌منظور تولید داده برای بررسی خـواص آمـاری پارامترهای انتقال حرارت جابه‌جـایی اجبـاری جریـان مغشوش نانوسـیال از ۴۱ نمونـه اسـتفاده گردیـده کـه داده‌های تولیدشده برای قطر ذرات نانو در محدودهٔ ۲۰ تا ۱۰۰ نانومتر انتخاب گردیده است. نتـایج حاصـل از تغییر عدد ناسلت در طول لوله نسبت به افـزایش قطـر ذرات نــانو در شــکل (۵) نشــان داده شــده اســت. همان‌طور که مشخص می‌شود عدد ناسلت برای تمامی نمونه‌ها در ابتدای لوله در بخش ورودی زیـاد اسـت و سپس کاهش می‌یابد. همان‌طور کـه مشـاهده مـی‌شـود عدد ناسلت به ازای قطرهای بـزرگ نـانوذرات تقریبـاً ثابت می‌مانـد کـه آن بـه‌دلیـل توسـعه‌یـافتگی جریـان می‌باشد. ازطرفی دیگر بـاافزایش قطـر نـانوذرات عـدد ناسلت در تمامی مقاطع کاهش می‌یابد. بنابراین هر چه ذرات ریزتر باشند هم انتقـال حـرارت بهتـری حاصـل می‌گردد و هم میزان ته‌نشینی آنهـا کمتـر خواهـد بـود. همچنین در شکل (٦) تغییـرات عـدد ناسـلت متوسـط برحسب قطر ذرات نانو ترسیم شده است. همـان‌طـور که در شکل (٦) مشاهده می‌گردد تغییرات عدد ناسلت متوسط در قطرهای کمتـر نـانوذرات زیـاد اسـت و بـا افزایش قطـر نـانوذرات ایـن تغییـرات انـدک و نـاچیز می‌گردد.

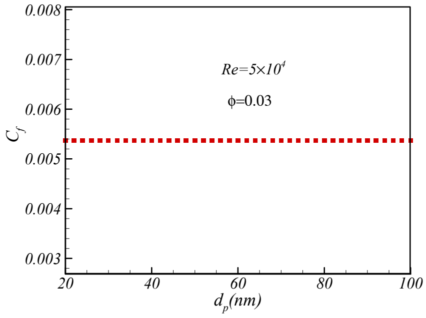


شکل ۵ تغییرات عدد ناسلت در مقاطع مختلف لوله برحسب قطر ذرات نانو



شکل ٦ تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب قطر ذرات نانو

پـارامتر بعـدی موردبررسـی در انتقـال حـرارت جابه‌جایی اجباری مغشوش نانوسیال، ضریب اصطکاک سـطحی دیـواره مـی‌باشـد. در شـکل (۷) ایـن پـارمتر برحسب قطرهای مختلف ذرات نانو ترسیم شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌گـردد بـاافزایش قطر ذرات نانو ضریب اصطکاک سطحی تغییـر زیـادی ندارد و تقریباً ثابت می‌ماند.



شکل ۷ ضریب اصطکاک سطحی دیواره برحسب قطر ذرات نانو

بنابراین افزایش قطر نانوذرات باتوجه‌به ثابت ماندن عدد رینولدز و کسر حجمی ذرات نانو اثر قابل‌ملاحظه‌ای بر ضریب اصطکاک سطحی ندارد و این پارامتر به‌عنوان یک پارامتر خنثی در شرایط مسئلهٔ حاضر وجود دارد.

به‌منظور بررسی کارایی نانوسیال باید به تجزیه و تحلیل تولید آنتروپی پرداخته شود. براساس مطالعات انجام‌شده تولید آنتروپی ناشی‌از انتقال حرارت و افت فشار خواهد بود. بیجان [27] و مقدمی و همکاران [28] به بررسی موضوعات فوق پرداخته‌اند. همچنین بایانکو و همکاران [29] انتقال حرارت جابه‌جایی جریان مغشوش را در یک لولهٔ دایره‌ای‌شکل با دیوارهٔ دماثابت به‌صورت عددی مطالعه نمودند. آنها دریافتند اگرچه با افزایش کسر حجمی ذرات نانو عدد ناسلت افزایش می‌یابد اما تولید آنتروپی و توان پمپاژ نیز افزایش خواهد یافت. ساها و پائول [26] نیز انتقال حرارت و تولید آنتروپی را در یک لولهٔ حرارتی بااستفاده‌از نانوسیالات مختلف به‌صورت عددی بررسی نمودند. آنها نتیجه گرفتند که با افزایش قطر نانوذرات تولید آنتروپی افزایش می‌یابد. ابراهیمی و همکاران [30] انتقال حرارت و تولید آنتروپی را در یک میکروکانال بااستفاده‌از دو نانوسیال آب/اکسید آلومینیوم و آب/اکسید مس به‌صورت عددی مطالعه کردند. آنها مشاهده کردند که تولید آنتروپی کل در بازه پارامترهای موردمطالعه اندک است.

تولید آنتروپی در مباحث انتقال حرارت و سیال شامل دو ترم تولید آنتروپی حرارتی و تولید آنتروپی اصطکاکی است که به‌ترتیب ناشی از انتقال حرارت و افت فشار می‌باشند. رابطه تولید آنتروپی به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

$$E_{gen} = E_{gen,th} + E_{gen,f} \qquad (۲۵)$$

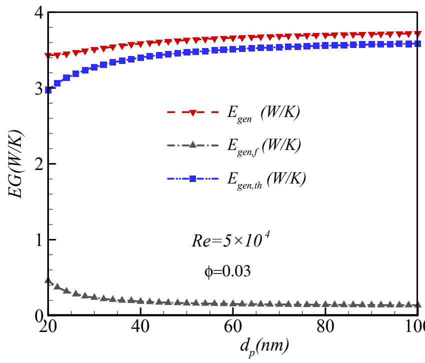
رابطهٔ فوق بیانگر آنتروپی کل می‌باشد که از دو ترم آنتروپی حرارتی ($E_{gen,th}$) و آنتروپی اصطکاکی ($E_{gen,f}$) تشکیل شده است. از طرفی دیگر هر کدام از این عبارات به شرح زیر تعریف می‌شوند:

$$E_{gen,th} = \pi D_h^2 L q_w^2 / k_{nf} Nu_{av} T_b \qquad (۲۶)$$

$$E_{gen,f} = 32\dot{m}^3 fL / \rho_{nf}^2 \pi^2 D_h^5 T_b \qquad (۲۷)$$

در روابط فوق (D_h) بیانگر قطر هیدرولیکی برحسب متر، L طول لوله برحسب متر و (q_w) شار حرارتی وارد بر دیوارهٔ لوله برحسب (W/m^2) می‌باشد. همچنین (k_{nf}) و (ρ_{nf}) به‌ترتیب قابلیت هدایتی و جرم حجمی نانوسیال و (Nu_{av})، (T_b) و (f) به‌ترتیب عدد ناسلت متوسط، دمای بالک و ضریب اصطکاک دارسی می‌باشند.

در شکل (۸) تولید آنتروپی حرارتی، اصطکاکی و تولید آنتروپی کل برحسب قطر ذرات نانو ترسیم گردیده است. همان‌طور که در شکل (۸) مشاهده می‌شود با افزایش قطر ذرات نانو تولید آنتروپی حرارتی افزایش می‌یابد. دلیل این افزایش می‌تواند به‌دلیل کاهش زیاد عدد ناسلت باتوجه‌به افزایش قطر نانوذرات توجیه گردد.



شکل ۸ تولید آنتروپی حرارتی، اصطکاکی و کل برحسب قطر نانوذرات

همان‌طور که در شکل (۸) مشهود است تغییرات تولید آنتروپی در قطرهای زیاد نانوذرات کمتر است که آن نیز به‌دلیل تغییرات اندک عدد ناسلت در قطرهای زیاد نانوذرات می‌باشد. همچنین در شکل (۸) تولید آنتروپی اصطکاکی برحسب قطر ذرات نانو ترسیم گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد اگرچه تغییر تولید آنتروپی اصطکاکی در قطرهای کم اندکی به چشم می‌خورد، ولی در قطرهای زیاد این تغییر نامحسوس است. دلیل این موضوع می‌تواند باتوجه‌به ثابت ماندن ضریب اصطکاک و تغییرات اندک دمای بالک در اثر افزایش قطر نانوذرات توجیه گردد. درنهایت به بحث تولید آنتروپی کل پرداخته می‌شود که مجموع تولید آنتروپی حرارتی و اصطکاکی می‌باشد. در شکل (۸) تولید آنتروپی کل برحسب قطرهای مختلف ذرات نانو ترسیم گردیده است. همان‌طور که قابل پیش‌بینی بود با عنایت به اینکه تولید آنتروپی حرارتی باافزایش قطر نانوذرات افزایش یافته است و تولید آنتروپی اصطکاکی تقریباً ثابت است، درنتیجه تولید آنتروپی کل نیز باافزایش قطر ذرات نانو افزایش می‌یابد.

هدف بعدی در این مقاله این است که خصوصیات آماری از جمله نوع تابع توزیع احتمال و پارامترهای آن برای متغیر عدد ناسلت در انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری جریان مغشوش نسبت به تغییرات قطر نانوذرات در محدودهٔ ۲۰ تا ۱۰۰ نانومتر به‌نحوی مناسب تعیین گردد. در این بخش به‌منظور مقایسهٔ پارامترهای آماری در داده‌های بیشتر، از ۳ عدد رینولدز ۲۵×۱۰^{۳} ، ۵×۱۰^{٤} و ۷۵×۱۰^{۳} و همچنین ۳ کسر حجمی ذرات ۱، ۲ و ۳ درصد استفاده شده است. انتخاب خواص آماری متغیرهای انتقال حرارت شامل دو مرحله است: ۱) برآورد پارامترهای تابع توزیع احتمال، بااستفاده‌از روش حداکثر درست نمایی؛ ۲) انتخاب بهترین تابع توزیع احتمال که از آزمون تست مربع کا (Chi-square test) استفاده شده است.

فرض بر این است که متغیر تصادفی وابسته X (نظیر Nu) دارای تابع چگالی احتمال پیوسته (Continuous probability density function) $f_x(x)$ باشد. این تابع توزیع احتمال شامل تعدادی پارامترهای مجهول می‌باشد. هدف محاسبهٔ پارامترهای تابع توزیع متغیر X است که از روش حداکثر درست‌نمایی (Maximum likelihood method) استفاده شده است [31]. در چنین حالتی تابع توزیع چگالی احتمال $f_x(x)$ داده‌های انتقال حرارت به‌صورت زیر برای n مشاهده براساس رویهٔ حداکثر درست‌نمایی تعریف می‌گردد. [32, 33]:

$$L(\theta)=f_X(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_x(x_i;\theta) \quad (۲۸)$$

که در آن $L(\theta)$ را تابع درست‌نمایی و θ پارامترهای تابع توزیع احتمال است که براساس حداکثرسازی معادلهٔ فوق قابل‌محاسبه است. بنابراین مشخص است که به‌ازای هر پارامتر تابع توزیع احتمال یک معادله نوشته شده است که حل آن منجربه محاسبهٔ پارامترهای مجهول تابع توزیع چگالی احتمال می‌گردد [51] و آن معادله به‌صورت زیر خواهد بود.

$$[\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_1}=0,\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_2}=0,\ldots,\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_n}=0]^T \quad (۲۹)$$

بهترین تابع توزیع احتمال که پارامترهای آن در مرحلهٔ قبل محاسبه شده است، بااستفاده‌از آمارهٔ مربع کای (Chi-square test) χ^2 انتخاب می‌گردد. ازاین‌رو، ابتدا داده‌های آماری را به تعداد K دسته تقسیم می‌گردد [31].

$$K = 1 + Log_2 N \qquad (۳۰)$$

که در آن N تعداد داده‌ها و K تعداد دسته‌ها می‌باشد. مقدار آماره مربع کا به‌صورت زیر قابل‌محاسبه است:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (۳۱)$$

در این رابطه O_i مقدار واقعی دسته i ام و E_i به‌صورت $F(x_2) - F(x_1)$ تعریف می‌شود که F تابع توزیع تجمعی احتمال (Cumulative probability density function) به‌ازای حد پایین دسته x_1 و حد بالای دسته x_2 می‌باشد. هرچه مقدار این آماره کمتر باشد داده‌ها تطابق بیشتری با تابع توزیع احتمال برآوردشده دارند.

براساس ٤١ دادهٔ تولیدشده از خواص انتقال حرارت در لوله موردبررسی خصوصیات آماری پارامتر عدد ناسلت ارزیابی گردیده است. همچنین در نقاط مختلف طول لوله که در محدوده جریان در حال توسعه و جریان توسعه‌یافته واقع گردیده است پارامترهای چندین تابع توزیع احتمال مقایسه گردیده است.

مطابق با نتایج حاصل در مقاطع مختلف از طول لوله خصوصیات آماری پارامترهای انتقال حرارت برآورد گردیده است. این خصوصیات آماری شامل میانگین، انحراف معیار، ضریب تغییرات، برجستگی و چولگی می‌باشند. برجستگی، میزان تیزی تابع توزیع احتمال داده‌های مورد بررسی را نسبت به تابع توزیع احتمال نرمال بیان می‌کند. اگر مقدار برجستگی برابر صفر گردد تابع توزیع احتمال داده‌ها مطابق با تابع توزیع احتمال نرمال می‌باشد و درصورت منفی بودن نسبت به تابع توزیع احتمال نرمال هموارتر و درصورت مثبت بودن، تابع توزیع احتمال داده‌ها نسبت‌به تابع نرمال تیزتر است. چولگی، میزان انحراف تابع توزیع احتمال داده‌ها را به‌سمت راست یا چپ نسبت به تابع نرمال مشخص می‌کند. اگر مقدار چولگی برابر ۳ گردد در چنین حالتی داده‌ها از تابع نرمال پیروی می‌کند و در صورتی که بزرگ‌تر از ۳ باشد، توزیع احتمال داده‌ها به‌سمت چپ متمایل است یا چولگی چپ دارد و در صورت کوچک‌تر از ۳، تابع توزیع احتمال داده‌ها به‌سمت راست متمایل است یا چولگی راست دارد. مطابق با آماره‌های فوق، خواص آماری داده‌های پارامتر عدد ناسلت برای مقاطع مختلف لوله در عدد رینولدز $۵×۱۰^{٤}$ و کسر حجمی ذرات نانو برابر ۳ درصد در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول ۱ خواص آماری عدد ناسلت در مقاطع مختلف در طول لوله برای عدد رینولدز $۵×۱۰^{٤}$ و کسر حجمی ذرات نانو ۳ درصد

موقعیت (متر)	۰/۰۵	۰/۱	۰/۳	۰/٦	۰/۹
میانگین	۳۵۱/۷۷	۳۲۹/۵	۳۱٦/٦۸	۳۱۳	۳۱۱/۵
انحراف معیار	۱۱/۹۰۸	۱۱/۵۵۹	۱۱/٦۰۲	۱۱/٦۹۳	۱۱/۷۲٤
ضریب تغییرات	۰/۰۳۳۸۵	۰/۰۳۵۰۸	۰/۰۳٦٦٤	۰/۰۳۷۳٦	۰/۰۳۷٦٤
برجستگی	٤/۵۰۱	٤/٤۹۸٦	٤/۵۰۱	٤/۵۰٦٦	٤/۵۰٦
چولگی	۲/۱٤۷۲	۲/۱٤٦٦	۲/۱٤٦۹	۲/۱٤۸٤	۲/۱٤۸۳

جدول ۲ خواص آماری عدد ناسلت در مقاطع مختلف در طول لوله برای عدد رینولدز 5×10^4 و کسر حجمی ذرات نانو ۱ درصد

موقعیت (متر)	۰/۰۵	۰/۱	۰/۳	۰/٦	۰/۹
میانگین	۳۵۷/۱۸	۳۳٤/۷۲	۳۲۱/۹۳	۳۱۸/۱	۳۱٦/۵۷
انحراف معیار	۵/۳۷۲	۵/۲۱٤	۵/۲۳۳	۵/۲۸۵۹	۵/۳۰۱۸
ضریب تغییرات	۰/۰۱۵۰٤	۰/۰۱۵۵۸	۰/۰۱٦۲٦	۰/۰۱٦٦۲	۰/۰۱٦۷۵
برجستگی	۳/۳۵۰۸	۳/۳٤٦۵	۳/۳۳۱۸	۳/٤۰۱٤	۳/٤۰۹۵
چولگی	۱/۹۱۳۲	۱/۹۱۲۲	۱/۹۱	۱/۹۱۸٤	۱/۹۱۸۷

جدول ۳ خواص آماری عدد ناسلت در مقاطع مختلف در طول لوله برای عدد رینولدز 5×10^4 و کسر حجمی ذرات نانو ۵ درصد

موقعیت (متر)	۰/۰۵	۰/۱	۰/۳	۰/٦	۰/۹
میانگین	۳٦۵/٦۸	۳٤۳/۰٦	۳۳۰/۳٦	۳۲٦/٦۸	۳۲۵/۱٤
انحراف معیار	٤۲/۵۹۱	٤۱/٤۹۳	٤۱/۸۰۹	٤۲/۰۵۸	٤۱/۹۹۳
ضریب تغییرات	۰/۱۱٦٤۷	۰/۱۲۰۹۵	۰/۱۲٦۵٦	۰/۱۲۸۷٤	۰/۱۲۹۱۵
برجستگی	٦/۷۵٤۸	٦/۸٤۱۱	٦/۸۸٤٦	٦/۹۲۰۳	٦/۸۸۲۸
چولگی	۲/۵۱٦۹	۲/۵۲۹٤	۲/۵۳٦۸	۲/۵۳۹۵	۲/۵۳۲۱

مطابق‌با نتایج ارائه‌شده در جدول (۱) مشخص است که ضریب تغییرات داده‌ها تا مقطع ۳۰ سانتی‌متری از طول لوله تغییرات زیادی دارد سپس تا ٦۰ سانتی متری این تغییرات کمتر می‌شود و درنهایت از ٦۰ سانتی‌متری تا ۹۰ سانتی‌متری این تغییرات بسیار ناچیز است و یا به‌عبارت دیگر جریان در داخل لوله در محدودهٔ ۳۰ تا ٦۰ سانتی‌متری در حال توسعه و از ٦۰ سانتی‌متری به بعد توسعه یافته شده است. این موضوع با شکل (۵) نیز هم‌خوانی دارد. براساس داده‌های جدول (۱) مشاهده می‌شود که مقدار کشیدگی مثبت است و براساس توضیحات ذکرشده، تابع توزیع احتمال داده‌های عدد ناسلت نسبت به تابع نرمال تیزتر است. همین‌طور در جدول (۱) مشاهده می گردد مقدار چولگی کوچک‌تر از عدد ۳ می‌باشد و بر این اساس تابع توزیع احتمال داده‌های عدد ناسلت متوسط به‌سمت راست متمایل یا چولگی راست دارد. برای مقایسهٔ دقیق‌تر مباحث فوق، خواص آماری عدد ناسلت در عدد رینولدز 5×10^4 و کسر حجمی ذرات نانو ۱ و ۵ درصد به‌ترتیب در جدول (۲ و ۳) ارائه شده است با بررسی نتایج جدول (۲ و ۳) نیز مشاهده می‌گردد که مقدار کشیدگی مثبت است و درنتیجه تابع توزیع احتمال داده‌های عدد ناسلت نسبت به تابع نرمال تیزتر است.

همچنین مشاهده می‌گردد که مقدار چولگی کوچک‌تر از عدد ۳ است. بنابراین تابع توزیع احتمال داده‌های عدد ناسلت چولگی راست دارد. تعیین تابع توزیع احتمال برای پارامتر عدد ناسلت در انتقال حرارت جریان نانوسیال بااستفاده‌از تست مربع کای صورت پذیرفته است. برای گزینش بهترین تابع توزیع احتمال از توابع شناخته‌شده ازجمله: نرمال، لوگ نرمال، گاما، گامبل، وایبول و فسچر استفاده شده است. این توابع توزیع احتمال دوپارامتری به‌شرح ذیل تعریف شده‌اند.

تابع توزیع احتمال وایبول:

$$f\left(Nu\right)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{Nu}{\beta}\right)^{\alpha\text{-}1}exp\left[-\left(\frac{Nu}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad (۳۲)$$

تابع توزیع احتمال نرمال:

$$f\left(Nu\right)=exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Nu\text{-}\mu}{\sigma}\right)^{2}\right]\Big/Nu\,\sigma\sqrt{2\pi} \quad (۳۳)$$

تابع توزیع احتمال لوگ نرمال:

$$f\left(Nu\right)=exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Ln\left(Nu\right)\text{-}\mu}{\sigma}\right)^{2}\right]\Big/Nu\,\sigma\sqrt{2\pi} \quad (۳٤)$$

تابع توزیع احتمال گاما:

$$f\left(Nu\right)=\left(Nu\right)^{\alpha\text{-}1}exp\left[-\left(\frac{Nu}{\beta}\right)\right]\Big/\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right) \quad (۳۵)$$

تابع توزیع احتمال فسچر:

$$f\left(Nu\right)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{Nu}\right)^{\alpha+1}exp\left[-\left(\frac{\beta}{Nu}\right)^{\alpha}\right] \quad (۳٦)$$

در رابطهٔ فوق Nu مقدار عدد ناسلت و α، β، σ و μ به‌ترتیب پارامتر بزرگ‌نمایی، ضریب شکل، ضریب مکان و پارامتر مقیاس توابع توزیع احتمال فوق می‌باشد. براساس توابع توزیع احتمال فوق تحلیل آماری در عدد رینولدز ۵×۱۰^{٤} و کسر حجمی ذرات نانو ۱، ۳ و ۵ درصد انجام گردیده و به‌ترتیب در جدول‌های (٤-٦) آورده شده است.

جدول ٤ مقادیر تست مربع کای برای توابع توزیع احتمال مختلف پارامتر عدد ناسلت در مقاطع مختلف لولهٔ دایره‌ای‌شکل برای عدد رینولدز ۵×۱۰^{٤} و کسر حجمی ذرات نانو برابر ۱ درصد

تابع توزیع احتمال	۰/۰۵	۰/۱	۰/۳	۰/٦	۰/۹
فسچر	۲/٤٤۷۵	۲/٤۵۳٤	۲/٤۸۲۸	۲/۳۳۵٦	۲/۳۳۱۸
گاما	۷/۲۳۳۲	۷/۲٤	۷/٦۷۲۸	٦/٤۸۳٦	٦/٤۷۱۲
گمبل ماکزیمم	۲/۹۷۸۹	۲/۹۸۵٦	۳/۰۳۵۱	٤/۰۳۲	٤/۰۲٤۱
گمبل مینیمم	۱۳/۳۷٤	۱۳/۳۸٤	۱۳/٤۵٤	۱٤/۷۸۲	۱٤/۷٦۲
لوگ نرمال	۷/۹٤۹	۷/۹٦۲۳	۸/۰۳۰۹	۷/۱٤٤٤	۷/۱۳۲٦
نرمال	۷/۲٦۹۵	۷/۲۷۷٦	۷/۷۱۱۷	٦/۵۱۷٦	٦/۵۰۵٦

جدول ۵ مقادیر تست مربع کای برای توابع توزیع احتمال مختلف پارامتر عدد ناسلت در مقاطع مختلف لولهٔ دایره‌ای‌شکل برای عدد رینولدز ۵×۱۰^{٤} و کسر حجمی ذرات نانو برابر ۳ درصد

تابع توزیع احتمال	۰/۰۵	۰/۱	۰/۳	۰/٦	۰/۹
فسچر	۳/۷٤۱٦	۳/۷۵۱۵	۳/۷٦۰۵	۳/۷۵۸۳	۳/۷۵۹۲
گاما	۸/٦۱۰۵	۸/٦۱۲٤	۸/٦۰۸۱	۸/۵۹۷	۸/۵۹۵٦
گمبل ماکزیمم	٤/٤۹۳۵	٤/٤۹۸۸	٤/٤۹۹۸	٤/٤۹۲۷	٤/٤۹۲٤
گمبل مینیمم	۱۸/۳۷٤	۱۸/۳۸۱	۱۸/۳۸۲	۱۸/۳۷۳	۱۸/۳۷۲
لوگ نرمال	۹/۲٦٦	۹/۲۸۵٦	۹/۳۰۳٤	۹/۳۰۱۹	۹/۳۰٤٤
نرمال	۸/۷۳٤۵	۸/۷٤۰۸	۸/۷٤۲۱	۸/۷۳۳۷	۸/۷۰۲۳

جدول ٦ مقادیر تست مربع کای برای توابع توزیع احتمال مختلف پارامتر عدد ناسلت در مقاطع مختلف لولهٔ دایره‌ای‌شکل برای عدد رینولدز 5×10^{4} و کسر حجمی ذرات نانو برابر ٥ درصد

تابع توزیع احتمال	۰/۰۵	۰/۱	۰/۳	۰/٦	۰/۹
فسچر	۲/٦۳۱۵	۲/٦۳۹۳	۲/٦٤٤۱	۲/٦٤۰۸	۲/٦٤۱۷
گاما	۸/٤٤۲۵	۸/۳۹۷۷	۸/۳٤۸۱	۸/۳۰٤۸	۸/۳۰۵
گمبل ماکزیمم	٤/٦٦۸٦	٤/٦٤۷٦	٤/٦۲٦۸	٤/٦۰۱۹	٤/٦۰۳۱
گمبل مینیمم	۱۷/۳۳۵	۱۷/۳۰۱	۱۷/۲٦٦	۱۷/۲۲۳	۱۷/۲۲۵
لوگ نرمال	۸/۲۷۹۷	۸/۲۹۰۳	۸/۳۰۵۹	۸/۲۸۲۲	۸/۲۸۱۸
نرمال	۸/۸۷۸	۸/۸٤۹۹	۸/۸۲۱۱	۸/۷۸٦۳	۸/۷۸۷۹

هرچه مقدار آمارهٔ مربع کای برای یک تابع توزیع احتمال کمتر باشد، داده‌ها تطابق بیشتری با تابع توزیع احتمال برآوردشده خواهند داشت. بر این اساس داده‌های به‌دست آمدهٔ حرارتی برای پارامتر عدد ناسلت در جریان مغشوش سیال نانو مطابق با جدول‌های (٦-٤) تطابق بیشتری با تابع توزیع احتمال فسچر دارند. همچنین مطابق این جدول‌های همان‌طور که مشاهده می‌شود تابع گمبل ماکزیمم در مرتبهٔ بعدی قرار دارد.

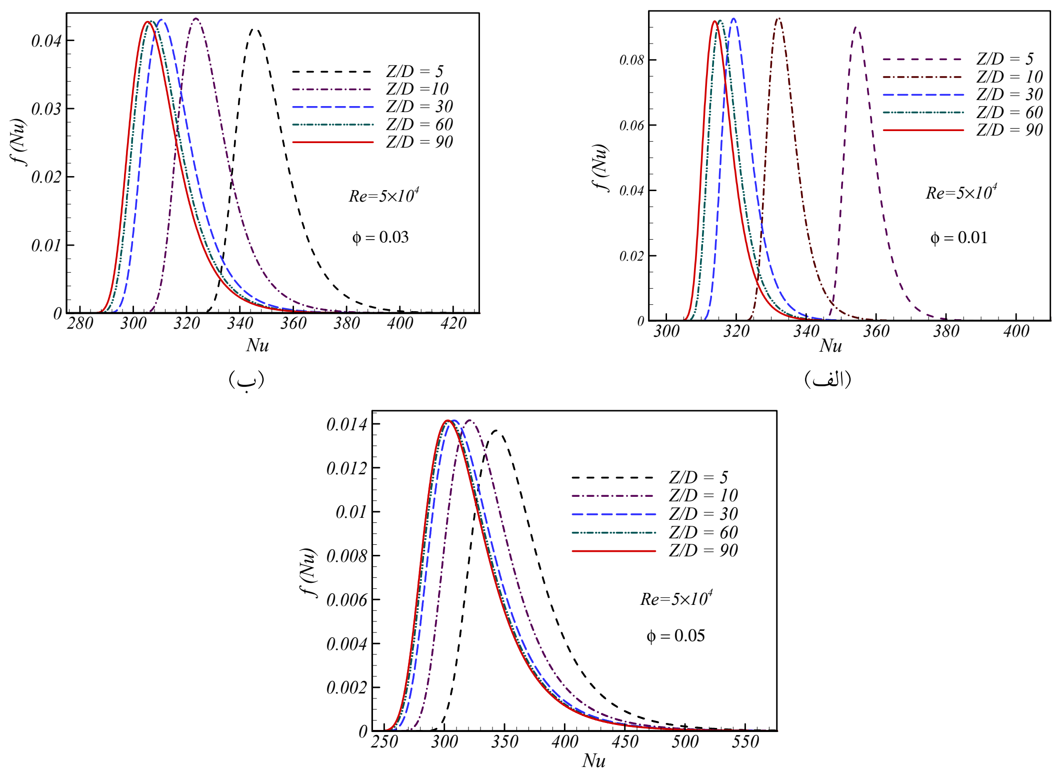
مطابق با تست مربع کای براساس داده‌های جداول (٦-٤) بهترین تابع توزیع احتمال برای عدد ناسلت در اکثر نقاط مورد بررسی لوله، تابع توزیع احتمال فسچر نتیجه شده است.

به‌منظور مقایسهٔ کمی نتایج تحلیل آماری از جدول (٥) استفاده می‌گردد. مقادیر تست مربع کای برای توابع توزیع احتمال مختلف ابتدا در ناحیهٔ ابتدای لوله در فاصلهٔ ٥ سانتی‌متری از ورودی جریان نانوسیال در لوله یعنی در بخش در حال توسعهٔ جریان انجام گردیده است. بر این اساس تابع توزیع احتمال فسچر در ابتدای لوله با تابع توزیع احتمال گمبل ماکزیمم کمترین اختلاف و برابر ۰/۷۵۱۹ و با تابع توزیع احتمال گمبل مینیمم بیشترین اختلاف و برابر ۱٤/٦۳۲٤ دارد. همچنین با توابع گاما، لوگ نرمال، نرمال و وایبول نیز به‌ترتیب اختلافی برابر با ٤/۸٦۸۸، ٥/٥۲٤٤، ٤/۹۹۲۹ و ۷/٥٦۰٤ دارد. ازطرفی دیگر در بخش انتهای لوله در فاصلهٔ ۹۰ سانتی‌متری از ورودی نیز نتایج مشابهی مشاهده می‌گردد. در این راستا اختلاف بین تابع فسچر با گمبل ماکزیمم و مینیمم برابر ۰/۷۳۳۲ و ۱٤/٦۱۲۸ و همچنین با توابع گاما، لوگ نرمال، نرمال و وایبول نیز به‌ترتیب اختلافی برابر با ٤/۸۳٦٤، ٥/٥٤٥۲، ٤/۹٤۳۱ و ۷/٥۷٤۸ دارد.

مقادیر محاسبه‌شده برای پارامترهای α و β در نقاط مختلف لوله در ناحیهٔ توسعه‌یافته و درحال توسعهٔ جریان در جدول (۷) درج شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات پارامترهای تابع توزیع فسچر از ابتدای لوله تا فاصلهٔ ۳۰ سانتی‌متری زیاد است و سپس تا فاصلهٔ ٦۰ سانتی‌متری کمتر می‌شود این بدان مفهوم است که جریان نانوسیال در داخل لوله در شرایط مسئلهٔ حاضر بعد از فاصلهٔ ٦۰ سانتی‌متری به توسعه‌یافتگی نزدیک می‌شود. با بررسی جدول (۷) همچنین مشخص است که تغییرات در محدودهٔ ۰/٦ تا ۰/۹ طول لوله، بسیار اندک است یعنی جریان تقریباً توسعه‌یافته شده است.

جدول ۷ پارامترهای تابع توزیع احتمال عدد ناسلت در مقاطع مختلف لوله برای عدد رینولدز ۵×۱۰^{٤}
و کسر حجمی‌های مختلف ذرات نانو برابر ۱ ، ۳ و ۵ درصد

کسر حجمی ذرات نانو	موقعیت(متر)	۰/۰۵	۰/۱	۰/۳	۰/٦	۰/۹
□ = ۰/۰۱	پارامتر α	۸٦/۸۹۸	۸۳/۹۲۹	۸۰/٤۲۱	۷۸/۹۳۲	۷۸/۳٦۷
	پارامتر β	۳٥٤/٤۷	۳۳۲/۰۹	۳۱۹/۲۹	۳۱٥/٤٤	۳۱۳/۹
□ = ۰/۰۳	پارامتر α	۳۹/۳٤۳	۳۸/۰۰۲	۳٦/۳٤۳	۳٥/۷٤۸	۳٥/٤۸۹
	پارامتر β	۳٤٥/۸۲	۳۲۳/۷۲	۳۱۰/۸۱	۳۰۷/۱۷	۳۰٥/٦٥
□ = ۰/۰٥	پارامتر α	۱۲/۸۱	۱۲/۳۹٦	۱۱/۸۹٥	۱۱/۷۳۱	۱۱/٦۹۳
	پارامتر β	۳٤٥/۱۳	۳۲۳/۰۸	۳۱۰/۲٥	۳۰٦/٤۹	۳۰٤/۹۷



شکل ۹ مقایسهٔ تابع توزیع احتمال فسچر برای عدد ناسلت در مقاطع مختلف لوله در عدد رینولدز ثابت ۵×۱۰٤
و در کسر حجمی‌های: الف) ۱ درصد، ب) ۲ درصد و پ) ۳ درصد

مطابق با پارامترهای تابع توزیع احتمال عدد ناسلت، تابع توزیع احتمال فسچر برای عدد رینولدز ثابت ۵×۱۰^{٤} و کسرهای حجمی ذرات نانو ۱، ۲ و ۳ درصد در شکل (۹) ترسیم گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این نمودارها در تمامی مقاطع چولگی به‌سمت راست دارند. این بدان مفهوم است که تمرکز داده‌ها بیشتر در سمت راست هر نمودار یعنی در قطرهای بزرگ نانوذرات می‌باشد و یا در بیانی دیگر در قطرهای بزرگ نانوذرات تغییرات عدد ناسلت کم می‌باشد. ازطرفی دیگر همان‌طور که در شکل (۹) نیز

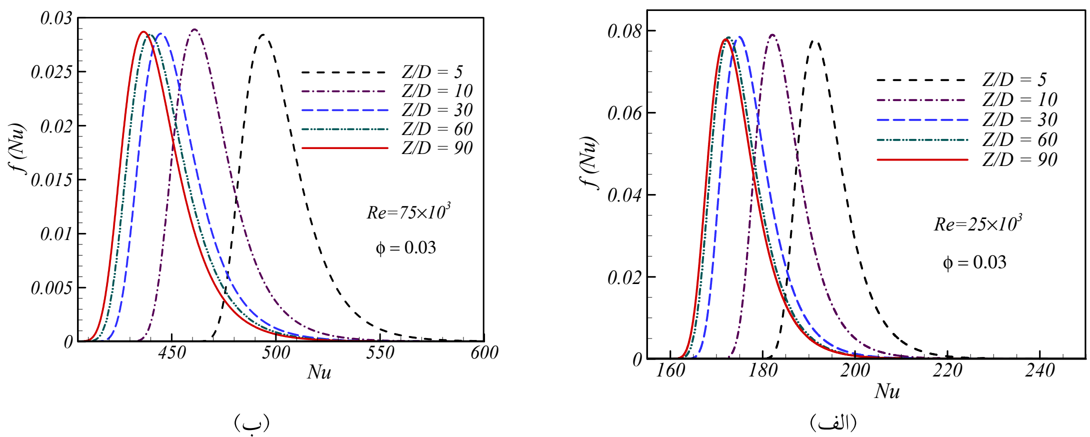
مشهود است باافزایش طول لوله نمودارها به یکدیگر نزدیک می‌شود. نزدیک شدن نمودارها به مفهوم تغییرات اندک عدد ناسلت در انتهای لوله و یا توسعه‌یافتگی جریان می‌باشد.

با تغییر عدد رینولدز، تابع توزیع احتمال عدد ناسلت همانند نتایج بخش‌های قبل، تابع توزیع احتمال فسچر نتیجه شده است. بدین منظور از دو عدد رینولدز ۲۵×۱۰^۳ و ۷۵×۱۰^۳ و کسر حجمی ۳ درصد استفاده شده است. در شکل (۱۰) تابع توزیع احتمال فسچر در نقاط مختلف لوله برای اعداد رینولدز مذکور و کسر حجمی ۳ درصد ترسیم گردیده است.

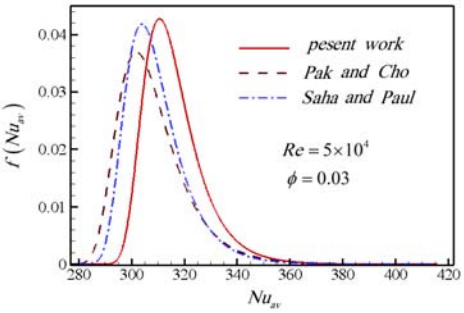
همان‌طور که مشاهده می‌شود این نمودارها نیز در تمامی مقاطع چولگی به‌سمت راست دارند و همچنین باافزایش طول لوله نمودارها به یکدیگر نزدیک‌تر شده و درواقع در انتهای لوله جریان توسعه یافته شده است. از طرفی دیگر همان‌طور که در شکل (۱٦) نیز مشهود است در عدد رینولدز کمتر نمودارها در انتهای لوله به یکدیگر نزدیک‌تر بوده و درواقع جریان زودتر به توسعه‌یافتگی رسیده است.

درپایان نیز به بررسی تابع توزیع احتمال رابطهٔ پاک و چو [13] و رابطهٔ ساها و پائول [26] می‌پردازیم و براساس نمودارهای به‌دست آمده، آنها را تحلیل خواهیم کرد. این نمودارها با ثابت فرض کردن عدد رینولدز و کسر حجمی ذرات نانو و تغییر قطر نانوذرات ترسیم گردیده است.

حال اگر تابع توزیع احتمال عدد ناسلت متوسط کار حاضر با دو رابطهٔ فوق مقایسه گردد، مشاهده می‌شود که برای عدد ناسلت متوسط در هر سه حالت تابع توزیع احتمال فسچر نتیجه خواهد شد. این موضوع در شکل (۱۱) بیان و ترسیم گردیده است. بنابراین براساس تست مربع کای بهترین تابع توزیع احتمال عدد ناسلت، تابع چگالی احتمال فسچر نتیجه شده است که این تابع می‌تواند درجهت تحلیل‌های قابلیت اعتماد یا طرح بهینه برمبنای قابلیت اطمینان برای توسعهٔ یک مدل احتمالاتی انتقال حرارت درآینده مورداستفاده قرار گیرد.



شکل ۱۰ مقایسهٔ تابع توزیع احتمال فسچر برای عدد ناسلت در مقاطع مختلف لوله در کسر حجمی ۳ درصد و در اعداد رینولدز: الف) ۲۵×۱۰^۳ و ب) ۷۵×۱۰^۳



شکل ۱۱ مقایسهٔ تابع توزیع احتمال فسچر عدد ناسلت کار حاضر با روابط پاک و چو [13] و ساها و پائول [26]

خلاصه و نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر قطر نانوذرات در انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری جریان مغشوش سیال نانوی آب-اکسیدآلومینیوم درون یک لولهٔ دایره‌ای‌شکل تحت شار حرارتی یکنواخت در بخش بالایی و عایق در بخش پائینی لوله به‌صورت عددی بررسی و تحلیل آماری گردیده است. جریان در لولهٔ موردبررسی باتوجه‌به قطر نانوذرات مختلف ارزیابی گردیده است. پس‌از بررسی نتایج مشاهده گردید که عدد ناسلت باافزایش قطر ذرات نانو کاهش می‌یابد و ضریب اصطکاک سطحی ثابت می‌ماند. از طرفی دیگر تولید آنتروپی کل باافزایش قطر نانوذرات افزایش یافته است. در تحلیل آماری به‌منظور تعیین تابع توزیع احتمال برای پارامتر عدد ناسلت در انتقال حرارت جریان مغشوش نانوسیال بااستفاده‌از تست مربع کای از توابع شناخته‌شده از جمله: نرمال، لوگ نرمال، گاما، گامبل، وایبول و فسچر استفاده شده است. پس از تحلیل داده‌های آماری مشاهده گردید که بهترین تابع توزیع احتمال برای عدد ناسلت هم در ناحیهٔ ورودی یا در حال توسعهٔ جریان و هم در انتهای لوله در بخش توسعه‌یافتهٔ جریان، تابع توزیع احتمال فسچر می‌باشد. به‌منظور تحلیل کمی اختلاف توابع موردبررسی نسبت به تابع فسچر از یک عدد رینولدز و کسر حجمی ثابت استفاده می‌گردد. اختلاف تابع توزیع احتمال فسچر در عدد رینولدز $۵×۱۰^{٤}$ و کسر حجمی ذرات نانو ۳ درصد با توابع توزیع احتمال گمبل ماکزیمم، گمبل مینیمم، گاما، لوگ نرمال، نرمال و وایبول در طول ۰/۰۵ متری لوله به‌ترتیب برابر با ۰/۷۵۱۹، ۱٤/٦۳۲٤، ٤/٨٦٨٨، ٥/٥٢٤٤، ٤/٩٩٢٩ و ٧/٥٦٠٤ و در طول ۰/۹ متری لوله به‌ترتیب برابر با ۰/٧٣٣٢، ١٤/٦١٢٨، ٤/٨٣٦٤، ٥/٥٤٥٢، ٤/٩٤٣١ و ٧/٥٧٤٨ می‌باشد. از طرفی دیگر با تغییر عدد رینولدز نیز مشاهده گردید که در تمامی مقاطع لوله تابع توزیع احتمال عدد ناسلت تابع فسچر می‌باشد.

همچنین قیاس تحلیل آماری مطالعهٔ حاضر با روابط و کارهای دیگران نیز نشان داد که بهترین تابع توزیع احتمال برای عدد ناسلت متوسط باتوجه‌به تغییرات قطر نانوذرات و ثابت ماندن دو متغیر عدد رینولدز و کسر حجمی ذرات نانو، تابع توزیع احتمال فسچر می‌باشد.

مراجع

1. Azmi, W.H., Sharma, K.V., Sarma, P.K., Mamat, R., Anuar, Sh. and Sundar, L.S., "Numerical validation of experimental heat transfer coefficient with SiO_2 nanofluid flowing in a tube with twisted tape inserts", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 73, pp. 296-306, (2014).
2. Eiamsa-ard, S. and Kiatkittipong, K., "Heat transfer enhancement by multiple twisted tape inserts and TiO_2/water nanofluid", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 70, pp. 896-924, (2014).
3. Dawood, H. K., Mohammed, H.A., Che Sidik, N.A., Munisamy. K.M. and Wahid, M.A., "Forced natural and mixed-convection heat transfer and fluid flow in annulus: A review", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 62, pp. 45–57, (2015).

4. Sabaghan, A., Edalatpour, M., Charjouei Moghadam, M., Roohi, E. and Niazmand, H., "Nanofluid flow and heat transfer in a microchannel with longitudinal vortex generators: Two-phase numerical simulation", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 100, pp. 179-189, (2016).
5. Shariat, M., Mokhtari Moghari, R., Akbarinia, A., Rafee, R. and Sajjadi, S.M., "Impact of nanoparticle mean diameter and the buoyancy force on laminar mixed convection nanofluid flow in an elliptic duct employing two phase mixture model", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 15–24, (2014).
6. Behzadmehr, A., Saffar-Avval, M. and Galanis, N., "Prediction of turbulent forced convection of a nanofluid in a tube with uniform heat flux using a two phase approach", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, pp. 211-219, (2007).
7. Nalwa, H.S., "Chemical Synthesis of Nanoparticles, Encyclopedia of nanoscience and nanotechnology", Vol. 6, pp. 757-759, (2004).
8. Mirmasoumi, S. and Behzadmehr, A., "Effect of nanoparticles mean diameter on mixed convection heat transfer of a nanofluid in a horizontal tube", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 6, pp. 706-714, (2009).
9. Akbarinia, A. and Laur, R., "Investigating the diameter of solid particles effects on a laminar nanofluid flow in a curved tube using a two phase approach", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 57, No.1, pp. 2739-2754, (1998).
10. Anoop, K.B., Sundararajan, T. and Das, S.K., "Effect of particle size on the convective heat transfer in nanofluid in the developing region", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 2189–2195, (2009).
11. Fani, B., Abbassi, A. and Kalteh, M., "Effect of nanoparticles size on thermal performance of nanofluid in a trapezoidal microchannel-heat-sink", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 155–161, (2013).
12. Mokhtari Moghari, R., Mujumdar, A.S., Shariat, M., Talebi, F., Sajjadi, S.M. and Akbarinia, A., "Investigation effect of nanoparticle mean diameter on mixed convection Al2O3-water nanofluid flow in an annulus by two phase mixture model", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 25–35, (2013).
13. Pak, B.C. and Cho, Y.I., "Hydrodynamic and heat transfer study of dispered fluids with submicron metallic oxide particles", *Experimental Heat Transfer*, Vol. 11, pp.151-170, (1998).
14. Abbasian Arani, A.A. and Amani, J., "Experimental study on the effect of TiO2–water nanofluid on heat transfer and pressure drop", *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 42, pp. 107–115, (2012).
15. Sajadi, A.R. and Kazemi, M.H., "Investigation of turbulent convective heat transfer and pressure drop of TiO2/water nanofluid in circular tube", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 1474–1478, (2011).
16. Beheshti, A., Keshavarz Moraveji, M. and Hejazian, M., "Comparative Numerical Study of Nanofluid Heat Transfer through an Annular Channel", *Numerical Heat Transfer*, Part A, Vol. 67, No.1, pp. 100-117, (2015).
17. Vahidinia, F., Keshtegar, B. and Miri, M., "Statistical analysis of the effect of nanoparticles volume fraction on turbulent forced convective heat transfer coefficient of nanofluid in a circular tube", *Ciência eNatura, Santa Maria*, Vol. 37, pp. 141−152, (2015).
18. Bianco, V., Manca. O. and Nardini, S., "Numerical investigation on nanofluids turbulent convection heat transfer inside a circular tube", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 50, pp. 341-349, (2011).

19. Manninen, M., Taivassalo, V. and Kallio, S., "On the mixture model for multiphase flow", *Technical Research Center of Finland, VTT Publications,* Vol. 288, pp. 9–18, (1996).
20. Schiller, L. and Naumann, A., "A drag coefficient correlation", *Z. Ver. Deutsch. Ing*, Vol. 77, pp. 318–320, (1935).
21. Launder B.E. and Spalding, D.B., "Lectures in Mathematical Models of Turbulence", *Academic Press, London, England,* (1972).
22. Chon, C.H., Kihm, K.D., Lee, S.P. and Choi, S.U.S., "Empirical correlation finding the role of temperature and particle size for nanofluid (Al_2O_3) thermal conductivity enhancement", *Appl. Phys. Lett*, Vol. 87, pp. 1–3, (2005).
23. Masoumi, N., Sohrabi, N. and Behzadmehr, A., "A new model for calculating the effective viscosity of nanofluids", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 42**,** pp. 1–6, (2009).
24. Gnielinski, V., "New equations for heat and mass transfer in turbulent pipe and channel flow", *International Chemical Engineering,* Vol. 16. pp. 359–368, (1976).
25. Petokhov, B.S., "Heat Transfer and Friction in Turbulent Pipe Flow with Variable Physical Properties", *Academic Press, New York*, Vol. 6, (1970).
26. Saha, G. and Paul, M.C., "Heat transfer and entropy generation of turbulent forced convection flow of nanofluids in a heated pipe", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 61, pp. 26–36, (2015).
27. Bejan, A., "Entropy generation minimization", *Boca Raton: CRC Press*, (1996).
28. Moghaddami, M., Mohammadzade, A. and Alem Varzane Esfehani S., "Second law analysis of nanofluid flow", *Energy Conversion and Management*, Vol. 52, pp. 1397–1405, (2011).
29. Bianco, V., Manca. O. and Nardini, S., "Performance analysis of turbulent convection heat transfer of Al_2O_3 water-nanofluid in circular tubes at constant wall temperature", *Energy*, Vol. 77, pp. 403-413, (2014).
30. Ebrahimi, A., Rikhtegar, F., Sabaghan, A. and Roohi, E., "Heat transfer and entropy generation in a microchannel with longitudinal vortex generators using nanofluids", *Energy,* Vol. 101, pp. 190–201, (2016).
31. Gulikers, J. and Raupach, M., "Preface. Modelling of reinforcement corrosion in concrete", *Materials and Corrosion*, Vol. 57, No. 8, pp. 603-604, (2006).
32. Gupta, S.P., "Statistical Method", *New Dehli*, (1997).
33. Rohatgi, V.K. and Ehsanes, S.A.K., "Introduction to probability and statistics", *Macmillan published Company, New York*, (2001).